Řešení příkladu **G4**

Matěj Novotný

13.11.2014

.

G4 Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce utržit. Letadlo má 216 míst, ale ví se, že zhruba 5% lidí se k odletu nedostaví. Kolik může společnost prodávat letenek na jeden let, chce-li držet pravděpodobnost, že k odletu se dostaví více než 216 lidí pod hladinou $\alpha = 0.1$?

Řešení Označíme n počet prodaných letenek, X_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ náhodnou veličinu nabývající 0, pokud i-tý cestující nepřijde a 1, pokud přijde k odletu. Zřejmě X_i je náhodná veličina s alternativním rozdělením s parametrem $p = 0.95$. Čili platí $\mathbb{E}X_i = p$, $\mathbf{D}X_i = p(1-p)$ pro každé $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Označme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Pro dostatečně velká n bude dle CLV platit, že veličina

$$U_n = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

má téměř normované normální rozdělení, neboli $U_n \sim N(0,1)$. Proto je možné pro každé $u \in \mathbb{R}$ psát $\mathbf{P}(U_n < u) = F_{U_n}(u) \doteq \Phi(u)$ (přičemž první rovnost je jen rozepsání definice a druhá rovnost platí dle CLV a je jen přibližná).
Chceme zjistit, jaké může být n, proto řešíme nerovnici

$$\mathbf{P}\left(X > 216\right) < 0.1$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{216 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) < 0.1$$

po dosazení $p = 0.95$ a U_n

$$\mathbf{P}\left(U_n > \frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right) < 0.1$$

pronásobíme -1 a přičteme 1.

$$-\mathbf{P}\left(U_n > \frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right) > -0.1$$

$$1 - \mathbf{P}\left(U_n > \frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right) > 1 - 0.1$$

$$\mathbf{P}\left(U_n \leq \frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right) > 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right) > 0.9$$

Složíme s kvantilovou funkcí normovaného normálního rozdělení, tj. $q = \Phi^{-1}$. Ta je rostoucí, proto se nemění nerovnost.

$$\frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}} > q(0.9)$$

Tedy dostáváme

$$216 > q(0.9)\frac{\sqrt{19n}}{20} + \frac{19}{20}n,$$

což lze řešit buďto zkusmo (výraz napravo s každým n roste, takže to není tak težké) nebo umocněním. Výraz nalevo v nerovnosti

$$216 - \frac{19}{20}n > q(0.9)\frac{\sqrt{19n}}{20},$$

bude kladný pouze pro $n < \frac{4320}{19} \doteq 227.36$ (tj. pro $n \leq 227$), proto lze při umocnění nezměnit znaménko nerovnosti jen pro $n \leq 227$. Zároveň pravá strana nerovnosti je vždy větší než 0, proto nerovnost pro $n > 227$ platit nemůže. Pro $n \leq$ tedy po umocnění dostáváme

$$(216)^2 - \frac{2052}{5}n + \frac{361}{400}n^2 > q^2(0.9)\frac{19n}{400}$$

$$\frac{361}{400}n^2 - \left(\frac{2052}{5} + q^2(0.9)\frac{19}{400}\right)n + (216)^2 > 0$$

$$D = 64.083808229$$

$$n_{1,2} = \frac{410.478 \pm 8.005}{\frac{361}{200}}$$

$$n_1 \doteq 231.86$$

$$n_2 \doteq 222.98.$$

První kořen nevyhovuje podmínce $n \leq 227$, tedy lze říci, že nerovnici splňují pouze všechna $n \leq 222$. Společnost tedy může prodávat k letu 222 letenek a pravděpodobnost, že přijde příliš mnoho lidí, bude stále menší než 0.1.

Remark. Druhý kořen vyšel téměř rovný 223, proto naše řešení dává menší pravděpodobnost, že cestujících k odletu přijde příliš, než bylo požadovaných 0.1. Sledujme, kolik vychází CLV-odhady na tuto pravděpodobnost, pokud společnost prodá letenek postupně 222, 223 a 224. Dosadíme-li tato n do vzorce

$$\mathbf{P}\left(U_n > \frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(U_n \leq \frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{216 - \frac{19}{20}n}{\frac{\sqrt{19n}}{20}}\right),$$

dostáváme postupně pravděpodobnosti

$$p_{222} = 1 - \Phi\left(\frac{5.1}{3.247306}\right) = 0.058,$$

$$p_{223} = 1 - \Phi\left(\frac{4.15}{3.254612}\right) = 0.1003,$$

$$p_{224} = 1 - \Phi\left(\frac{3.2}{3.261901}\right) = 0.1635.$$

Všimněte si, že přidáním jediné letenky vzroste pravděpodobnost z 6% na 10% a z 10% na 16%!!!